Метод Фурье для трехмерного уравнения Пуассона

Рассмотрим трехмерное уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=-f(x,y) \qquad (1)$$

Аппроксимируя уравнения (1) получим

$$\frac{P_{i+1jk}-2P_{ijk}+P_{i-1jk}}{\Delta x^2}+\frac{P_{ij+1k}-2P_{ijk}+P_{ij-1k}}{\Delta y^2}+ \\ +\frac{P_{ijk+1}-2P_{ijk}+P_{ijk-1}}{\Delta z^2}=-f_{ijk} \qquad (2)$$

Численное решение задачи ищем в виде рядов Фурье

$$P_{ijk}=\sum_{n=1}^{N-1}a_{njk}\sin\frac{\pi in}{N} \qquad (3)$$

$$f_{ijk}=\sum_{n=1}^{N-1}b_{njk}\sin\frac{\pi in}{N} \qquad (4)$$

$$a_{njk}=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N-1}P_{ijk}\sin\frac{\pi in}{N}$$

$$b_{njk}=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N-1}f_{ijk}\sin\frac{\pi in}{N}$$

Подставим (3) и (4) в (2) и получим

$$\sum_{n=1}^{N-1}\left\{\frac{1}{\Delta x^2}\left[\begin{array}{l}a_{njk}\sin\frac{\pi(i+1)n}{N}-2a_{njk}\sin\frac{\pi in}{N}+\\+a_{njk}\sin\frac{\pi(i-1)n}{N}\end{array}\right]+\right. \\ +\frac{1}{\Delta y^2}\left[a_{nj+1k}\sin\frac{\pi in}{N}-2a_{njk}\sin\frac{\pi in}{N}+a_{nj-1k}\sin\frac{\pi in}{N}\right]+ \qquad (5) \\ \left.+\frac{1}{\Delta z^2}\left[a_{njk+1}\sin\frac{\pi in}{N}-2a_{njk}\sin\frac{\pi in}{N}+a_{njk-1}\sin\frac{\pi in}{N}\right]\right\}= \\ =\sum_{n=1}^{N-1}b_{njk}\sin\frac{\pi in}{N}$$

Используя свойство

$$\sin\frac{\pi(i+1)n}{N}+\sin\frac{\pi(i-1)n}{N}=2\sin\frac{\pi in}{N}\cos\frac{\pi n}{N}$$

Можно будет переписать уравнения (5) в таком виде

$$\sum_{n=1}^{N-1}\left\{\frac{1}{\Delta x^2}\left[2a_{njk}\sin\frac{\pi in}{N}\cos\frac{\pi n}{N}-2a_{njk}\sin\frac{\pi in}{N}\right]+\right.$$
$$+\frac{1}{\Delta y^2}\left[a_{nj+1k}\sin\frac{\pi in}{N}-2a_{njk}\sin\frac{\pi in}{N}+a_{nj-1k}\sin\frac{\pi in}{N}\right]+$$
$$\left.+\frac{1}{\Delta z^2}\left[a_{njk+1}\sin\frac{\pi in}{N}-2a_{njk}\sin\frac{\pi in}{N}+a_{njk-1}\sin\frac{\pi in}{N}\right]\right\}=$$
$$=\sum_{n=1}^{N-1}b_{njk}\sin\frac{\pi in}{N}$$

Перепишем последнее уравнение в таком виде

$$\sum_{n=1}^{N-1}\sin\frac{\pi in}{N}\left\{\frac{1}{\Delta x^2}\left[2a_{njk}\cos\frac{\pi n}{N}-2a_{njk}\right]+\right.$$
$$+\frac{1}{\Delta y^2}\left[a_{nj+1k}-2a_{njk}+a_{nj-1k}\right]+$$
$$\left.+\frac{1}{\Delta z^2}\left[a_{njk+1}-2a_{njk}+a_{njk-1}\right]\right\}=\sum_{n=1}^{N-1}b_{njk}\sin\frac{\pi in}{N}$$

Теперь мы можем сократить на $\sin\frac{\pi in}{N}\neq 0$ и напишем уравнения для n=1

$$\frac{1}{\Delta x^2}\left[2a_{njk}\cos\frac{\pi n}{N}-2a_{njk}\right]+\frac{1}{\Delta y^2}\left[a_{nj+1k}-2a_{njk}+a_{nj-1k}\right]+$$
$$+\frac{1}{\Delta z^2}\left[a_{njk+1}-2a_{njk}+a_{njk-1}\right]=b_{njk}$$

Последнее уравнение приводим в векторный вид

$$A_i a_{i+1}+B_i a_i+C_i a_{i-1}=b_i \qquad i=1,N-1$$

И решаем с помощью матричной прогонки. Где коэффициенты матричной прогонки имеют такой вид

$$A_i=\begin{vmatrix}\frac{1}{\Delta y^2} & 0 & . & 0\\ 0 & \frac{1}{\Delta y^2} & . & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta y^2}\end{vmatrix} \quad C_i=\begin{vmatrix}\frac{1}{\Delta y^2} & 0 & . & 0\\ 0 & \frac{1}{\Delta y^2} & . & 0\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta y^2}\end{vmatrix}$$

$$B_i = \left| \begin{array}{cccc} \frac{2}{\Delta x^2}\cos\frac{\pi n}{N} - \frac{2}{\Delta x^2} - \frac{2}{\Delta y^2} - \frac{2}{\Delta z^2} & \frac{1}{\Delta z^2} & . & 0 \\ \frac{1}{\Delta z^2} & \frac{2}{\Delta x^2}\cos\frac{\pi n}{N} - \frac{2}{\Delta x^2} - \frac{2}{\Delta y^2} - \frac{2}{\Delta z^2} & . & 0 \\ & & & . \\ . & . & . & \frac{1}{\Delta z^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta z^2} & \frac{2}{\Delta x^2}\cos\frac{\pi n}{N} - \frac{2}{\Delta x^2} - \frac{2}{\Delta y^2} - \frac{2}{\Delta z^2} \end{array} \right|$$

Коэффициенты a_i можно найти с помощью матричной прогонки мы подставляем в (3) и находим численное решение для P_{ijk}.